Marches aléatoires et résolution de labyrinthes

"Le Labyrinthe a été conçu par le grand architecte Dédale, pour tenir enfermé l'effrayant Minotaure, fils du roi Minos de Crète. Thésée entre dans le Labyrinthe, il vainc le Minotaure. Mais voilà, il lui faut retrouver la sortie. Il n'a aucun moyen de laisser des marques dans le Labyrinthe, et en particulier, il n'a pas pu marquer son itinéraire à l'aller. Avant son d'epart, Ariane, fille du roi Minos, lui a suggéré cette m'ethode : "Thésée, laisse ta main gauche glisser le long du mur. Si elle n'en d'ecolle jamais, tu passeras par tous les couloirs du Labyrinthe, et tu trouveras certainement la sortie" . A quelle condition sur le plan du Labyrinthe la m'ethode d'Ariane va-t-elle tirer d'affaire Thésée ? Il y a-t-il des plans de labyrinthes pour lesquels la méthode d'Ariane ne marche pas, mais où d'autres stratégies fonctionnent ?"

Introduction

La méthode d'Ariane n'est pas applicable à tous les labyrinthes. Il suffit qu'il existe un mur libre isolé pour que la méthode échoue.

Nous nous intéressons ici à une méthode probabiliste permettant d'atteindre la sortie dans tout labyrinthe fini, c'est-à-dire un labyrinthe possédant un nombre fini de carrefours, d'impasses et de sorties. Nous le modélisons par un graphe fini, en oubliant les longueur des couloirs.

On nomme les sommets du labyrinthe par des nombres naturels, et les sorties par S_n

À chaque sommet du labyrinthe, on associe une probabilité uniforme de transition vers les sommets voisins.

Au contraire, les sommets correspondant aux sorties sont considérés comme des états absorbants : une fois atteints, ils ne permettent plus de revenir dans le labyrinthe, c'est-à-dire qu'ils renvoient vers eux-mêmes avec une probabilité égale à 1.

On obtient ainsi une chaîne de Markov finie avec un nombre fini d'états absorbants correspondant aux sorties.

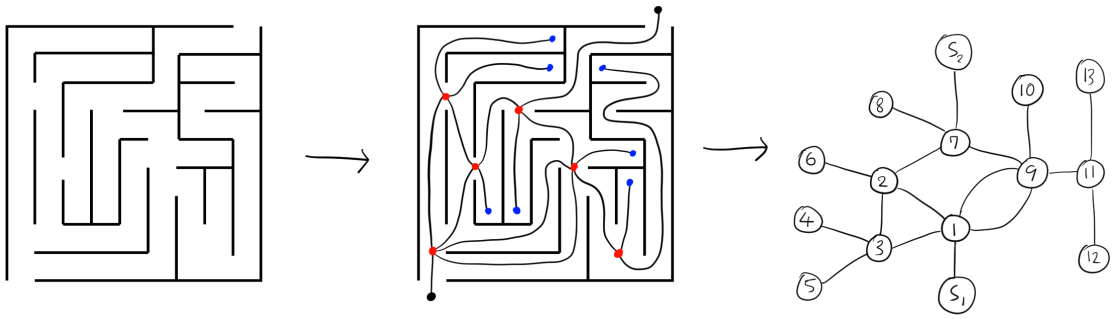


Fig.1 Exemple de graphe associé à un labyrinthe

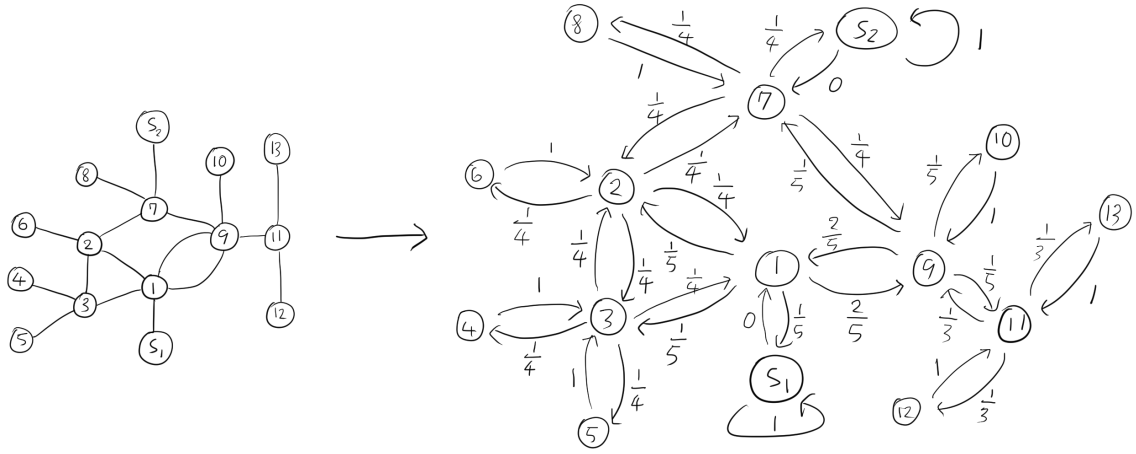


Fig.2 Associer des probabilités au graphe

Rappels, Notations et définitions

Nous introduisons ici les définitions et résultats essentiels à la suite. Les théorèmes sont rappelés sans démonstration.

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, les solutions de l'équation $\det(\lambda I - M) = 0$ sont appelées les valeurs propres de la matrice M. On va noter l'ensemble des valeurs propres de M par $\mathrm{Sp}(M)$.

Pour $M = (a_{ij})$, la norme infinie de M est définie par :

$$\|M\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \tag{1}$$

Elle vérifie les propriétés d'une norme, ainsi que la propriété $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$

$\rho(M) = \max\{|\lambda| \big| \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$ est appelé le rayon spectral de M. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(M) < 1 \iff \lim_{n\to\infty} M^n = O \tag{2}$$

Elle vérifie ces propriétés : $\rho(M) \leq \|M\|_\infty \qquad \rho(M) = \lim_{n\to\infty} \|M^n\|_\infty^{1/n}$

Pour les matrices qui verifie $\rho(M) < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} M^k = (I - M)^{-1} \tag{3}$$

Une matrice positive (resp. non négative) est une matrice dont tous les coefficients sont positifs (resp. non négatifs).

M est appelée une matrice stochastique lorsqu'elle est une matrice non négative telle que la somme de chaque ligne est égale à 1.
M st appelée une matrice stochastique faible lorsqu'elle est une matrice non négative telle que la somme de chaque ligne est inférieure ou égale à 1. Autrement dit $\|M\|_\infty \leq 1$
Une matrice stochastique (faible ou non) M vérifie $\rho(M) \leq 1$

Une matrice non négative $M = (a_{ij})$ est dite irréductible si elle vérifie :$\forall i, \forall j, \exists N \in \mathbb{N}^*, a_{ij}^N \neq 0$.
Cette définition est équivalente à dire que le graphe associé à M est fortement connexe.

Le théorème de Perron-Frobenius nous dit qu'une matrice non négative irréductible M vérifie ces propriétés:
1.$\rho(M)$ est une valeur propre de M.
2.Il existe un vecteur propre associé à $\rho(M)$ qui est un vecteur positif (c'est-à-dire un vecteur dont tous les coefficients sont positifs).
3.la formule de Collatz–Vieland:

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq \rho(M) \leq \max_i \sum_j a_{ij} \tag{4}$$

Matrice de transition

Pour chaque sommet, on considère la distance minimale permettant d'atteindre une sortie, et on regroupe les sommets par distance.

On note S l'ensemble des sorties, et C_n l'ensemble des points à partir desquels on peut atteindre une sortie en n pas.

Dans ce cas, $S = \{S_1, S_2\}$, $C_1 = \{1, 7\}$, $C_2 = \{2, 3, 8, 9\}$, $C_3 = \{4, 5, 10, 11\}$ et $C_4 = \{12, 13\}$.

On examine ensuite les probabilités de transition dans un tableau, classées par couche.

Dans notre exemple, le tableau est le suivant :

		S		C_1		C_2				C_3				C_4	
		S_1	S_2	1	7	2	3	8	9	4	5	10	11	12	13
S	S_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C_1	1	1/5	0	0	0	1/5	1/5	0	2/5	0	0	0	0	0	0
	7	0	1/4	0	0	1/4	0	1/4	1/4	0	0	0	0	0	0
C_2	2	0	0	1/3	1/3	0	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	1/4	0	1/4	0	0	0	1/4	1/4	0	0	0	0
	8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	9	0	0	2/5	1/5	0	0	0	0	0	0	1/5	1/5	0	0
C_3	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	0	1/3	1/3
C_4	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

On peut voir ce tableau comme une matrice de transition d'une chaîne de Markov.

En posant chaque bloc de la diagonale D_i, de la diagonale supérieure U_i et de la diagonale inférieure L_i, on peut réécrire la matrice de manière plus claire :

$$M = \begin{pmatrix} I & O & & & & \\ L_1 & D_1 & U_1 & & 0 & \\ & L_2 & D_2 & U_2 & & \\ & & L_3 & \ddots & & \\ & 0 & & & \ddots & U_{n-1} \\ & & & & L_n & D_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

M est une matrice stochastique, car c'est une matrice de transition d'une chaîne de Markov.
On définit deux matrices Q et R par

$$Q = \begin{pmatrix} D_1 & U_1 & & 0 & \\ L_2 & D_2 & U_2 & & \\ & L_3 & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & U_{n-1} \\ & & & L_n & D_n \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} L_1 \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \tag{6}$$

Q est la matrice de transition correspondant à l'intérieur du labyrinthe.
Par définition, Q est une matrice carrée qui est faiblement stochastique. On peut écrire

$$M = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix} \tag{7}$$

Les probabilités de transition en m pas correspondent aux coefficients de la matrice M^m.
Dire que l'on peut sortir du labyrinthe avec cette méthode est donc équivalent à dire que

$$\lim_{m\to\infty} M^m = \begin{pmatrix} I & O \\ N & O \end{pmatrix} \tag{8}$$

où N est une matrice de même taille que R. Or

$$M^m = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} I & O \\ \left(\sum_{k=0}^{m-1} Q^k\right) R & Q^m \end{pmatrix} \tag{9}$$

Donc (8) $\iff \lim_{m\to\infty} Q^m = O$. D'après (2), cela est équivalent à $\rho(Q) < 1$.

Démonstration

Montron que le rayon spectral de Q est strictement inferieur a 1.
Q est une matrice stochastique faible, donc on sait déjà que $\rho(Q) \leq 1$. Il suffit de montrer que $\rho(Q) \neq 1$.
Le graphe de l'intérieur du labyrinthe est fortement connexe, donc Q est une matrice irréductible.
$L_1 \neq O$, donc il existe au moins une ligne de Q telle que la somme des coefficients de cette ligne soit strictement inférieure à 1.
Q est une matrice non négative et irréductible, donc il existe un vecteur propre positif $x = (x_j)$ associé à la valeur propre $\rho(Q)$.
On fixe i comme le nombre tel que $x_i = \max_{1\leq j\leq n} x_j$.
Comme $Q = (Q_{ij})$ est irréductible, pour tout j il existe un entier naturel n_j tel que $(Q^{n_j})ij > 0$.

$$x_i = (Q^{n_j}x)_i = \sum_k (Q^{n_j})_{ik} x_k \leq x_i \sum_k (Q^{n_j})_{ik} \leq x_i \tag{10}$$

Les deux bornes étant égales, les inégalités sont en fait des égalités. En sommant par rapport à j, on obtient

$$\sum_k x_k \sum_j (Q^{n_j})_{ik} = \sum_k x_i \sum_j (Q^{n_j})_{ik} \tag{11}$$

Par définition, $\sum_j (Q^{n_j})_{ik} > 0$, donc $x_k = x_i$ pour tout k. Ainsi, $x = (x_i, x_i, \ldots, x_i)^{\mathrm{T}}$. On obtient

$$x_i = (Qx)_i = \sum_j Q_{ij} x_i \tag{12}$$

pour tout i. Or il existe une ligne telle que $\sum_j Q_{ij} < 1$, ce qui implique $x_i = 0$, contradiction.
Donc $\rho(Q) < 1$.

estimation du temps de sortie

la prochenne chose que on a esseiyer est de faire une estimation du temps pour pouvoir sortir a un certein temps. On avais d'abord esseyer d'associer une valeur a chaque block de la matrice de transition, et de cree une matrice stochastique plus petite tel que le rayon spectral est plus grand. pour cela, reformulons la definition de la matrice de transition.
Soit $N \in \mathbb{N}$ et une partition de $N = r_1 + r_2 + ... + r_n$
$(r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{N})$,on separe la matrice comme ceci:

$$Q = \begin{pmatrix} D_1 & U_1 & & 0 & \\ L_2 & D_2 & U_2 & & \\ & L_3 & \ddots & & \\ & & & \ddots & U_{n-1} \\ & 0 & & L_n & D_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

ici,$D_k \in M_{r_k}(\mathbb{C}), U_k \in M_{r_k, r_{k+1}}(\mathbb{C})$ et $L_k \in M_{r_k, r_{k-1}}(\mathbb{C})$
le premier esseit etait d'associer une moiyene a chaque block.